IL SISTEMA DINAMICO DI LORENZ

di Carlo Mozetic

ex System Engineer at ERICSSON Telecomunicazioni S.p.a.
R&D-GPC Division – Via Anagnina, 203 00040 Morena Rome Italy



Pubblicazione gratuita per la libera distribuzione offerta da:

© OPTELEX - Optical and RF Engineering – Rome (IT)

Diritti riservati – All Rights Reserved – 11/2026

1. Edward N. Lorenz e il suo sistema dinamico non lineare.....2

1.1 Teoria del circuito di Lorenz.....8

1.2 Implementazione del circuito di Lorenz.....12

1.3 Sistema di Lorenz ipercaotico pilotato da una sinusoide.....15

RIFERIMENTI E BIBLIOGRAFIA.....27

1. Edward N. Lorenz e il suo sistema dinamico non lineare

Tutti gli oscillatori nascono sfruttando l'instabilità prodotta da resistenze negative, indipendentemente se esse siano di tipo esplicito o implicito nel circuito oscillante; i sistemi che producono segnali caotici, invece, sono realizzati con resistenze negative particolari che derivano dai cosiddetti "convertitori di impedenza" (GIC, NIC, I-NIC o V-NIC) e che presentano uno o più punti di discontinuità nella loro funzione di trasferimento V-I. Il concetto su cui si basano tali circuiti è la loro capacità di disturbare se stessi in modo del tutto autonomo, in condizioni che si ripetono ciclicamente e che non hanno nulla a che vedere con l'instabilità che determina il loro naturale ciclo di oscillazione.

La resistenza negativa pura e lineare è una particolare resistenza negativa che ha una caratteristica equivalente a una retta con coefficiente angolare negativo, che occupa solo il secondo e il quarto quadrante e che passa per l'origine degli assi, cioè che interseca nel punto “0” sia l'asse delle tensioni che quello delle correnti. Un amplificatore operazionale non serve solo per realizzare resistenze negative, esso costituisce la base per ottenere altri circuiti molto interessanti denominati “NIC”, ovvero Negative Impedance Converter, tradotto: i convertitori di impedenza. In realtà il concetto di “convertitore di impedenza” o “invertitori” o “gyrator” fu teorizzato dallo stesso Bernard D.H. Tellegen nel 1948, l'inventore del pentodo, però si trattava solo di un'astrazione di un possibile nuovo elemento lineare (il quinto dopo la resistenza, la capacità, l'induttanza e il trasformatore ideale) fino alla realizzazione del primo vero amplificatore operazionale commerciale, cioè dopo il 1967. Pertanto, dopo questa data i “NIC” e i “gyrator” diventarono una realtà e furono impiegati all'interno di circuiti integrati in genere dedicati all'elaborazione analogica delle frequenze audio.

Ma ovviamente gli amplificatori operazionali vennero utilizzati in seguito anche per simulare resistenze negative NON lineari e lo scopo di questi circuiti come vedremo servì principalmente per realizzare oscillatori in regime caotico, cioè particolari dispositivi dinamici aventi una sensibilità esponenziale (esponente di Ljapunov) rispetto alle condizioni iniziali mostrando una casualità “apparente” durante l'evoluzione di variabili dinamiche. Detto così

sembra una cosa complicatissima, e invece come vedremo si tratta di un concetto piuttosto semplice sviluppato da Edward Norton Lorenz nel 1963 quando pubblicò un suo articolo in cui descriveva un comportamento caotico in un sistema semplice e deterministico. Lorenz dimostrò che un sistema di equazioni relativamente semplice poteva dare come risultato un'infinita serie di soluzioni particolarmente complesse e che mostravano una forte dipendenza dai dati iniziali.



Edward Norton Lorenz (1917-2008)

Tuttavia, malgrado la loro complessità il numero di soluzioni è comunque finito e quindi prevedibile. Dall'avvento degli amplificatori operazionali è stato quindi possibile replicare questa tipologia di comportamenti con dei circuiti più o meno complessi partendo proprio dagli oscillatori che, invece di produrre una semplice forma d'onda ben definita (sinusoide, rettangolo, triangolo, ecc.), producono particolari inviluppi variabili nel tempo apparentemente sconclusionati che però hanno una radice comune e che possono essere visibili su un comune oscilloscopio in diverse modalità. Non solo: questi inviluppi sono anche riproducibili in un ambiente simulato utilizzando un simulatore a banda intera (tipo SPICE, P-SPICE, ecc.) utilizzando sia i modelli ideali dei vari componenti elettronici (cioè diodi, transistor, condensatori, induttanze, ecc.) che quelli reali, ovvero quelli sintetizzati a partire dalle caratteristiche reali intrinseche di ciascun componente, ottenendo così anche la possibilità di eseguire un vero e proprio raffronto fra le caratteristiche di un circuito reale e uno artificiale attraverso l'utilizzo di modelli puramente matematici i quali possono essere così affinati e quindi migliorati con un notevole grado di precisione.

Poiché ormai è un parere comune che sia stato proprio Edward Lorenz a fornire le basi scientifiche su quella che oggi si definisce “la teoria del caos” l'autore dell'articolo ha deciso di iniziare questo capitolo fornendo qualche dettaglio in più sulla storia di questo fenomeno. È noto l'interesse dell'uomo nel trovare spiegazioni scientifiche su ogni cosa, dall'infinitamente grande all'infinitamente piccolo, è sempre stato così da migliaia di anni; tuttavia, mentre l'interesse su quest'ultima categoria si è sviluppata solo in tempi recenti col contributo di scienziati che abbiamo già imparato a conoscere, come Bohr, Heisenberg, Shrödinger, Fermi, ecc., lo studio del sistema solare, delle stelle e delle galassie appartengono a ricerche molto più antiche e che sono state sempre più affinate nel tempo. Se volessimo capire com'è nato l'interesse sui fenomeni caotici bisogna ripartire da Newton e dalla sua legge di gravitazione universale che è sempre stata valida, essa dice: due corpi dotati di massa si attraggono con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa. In pratica si ha che:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad [1]$$

in cui G = 6,67259(85) x 10^{-11} N x m^2/kg^2, il numero fra parentesi è l'incertezza assoluta; m_1 e m_2 sono invece le due masse e r è la distanza fra i centri dei due corpi. Con questa formula ad esempio è possibile calcolare istante per istante l'orbita della luna che ruota attorno alla terra. Ma cosa accade se i corpi invece di due diventassero tre? Questa era la domanda che si era posto un certo Giuseppe Luigi Lagrangia, naturalizzato in seguito Joseph-Louis Lagrange (Torino, 1736 – Parigi, 1813), che è stato un matematico e astronomo italiano naturalizzato francese e attivo, nella sua maturità scientifica, per 21 anni a Berlino e in seguito per altri 26 anni a Parigi.

Il problema dei tre corpi è uno dei problemi più noti della dinamica di base relativi alla meccanica classica. In generale esso consiste nel calcolare, data una posizione iniziale, la massa e la velocità di tre corpi soggetti all'influsso della reciproca attrazione gravitazionale nonché l'evoluzione futura

del sistema da essi costituito. Si potrebbe pensare in linea di principio che il calcolo possa essere effettuato risolvendo le equazioni differenziali ordinarie derivanti dalle leggi del moto di Newton, come avviene normalmente in presenza di due corpi; si dimostra tuttavia che la soluzione generale delle equazioni dinamiche di un sistema gravitazionale a tre corpi, che pure esiste ed è analitica, non è scrivibile in alcun modo in una forma esplicita che risulti più semplice delle equazioni originali di partenza. Soluzioni esplicite si possono trovare soltanto per casi particolari, mentre soluzioni di tipo approssimato, invece, sono ottenibili introducendo varie semplificazioni. Queste ultime si possono catalogare in due grandi gruppi:

- soluzioni di tipo numerico (un calcolatore determina per via approssimata l'evoluzione del sistema);
- soluzioni basate su perturbazioni.

In entrambi i casi, il risultato trovato è valido solo per un determinato lasso di tempo, oltre il quale il comportamento del sistema, che è di tipo caotico, diverge in modo imprevedibile.

Quando uno scienziato non è in grado di spiegare un fenomeno che non si può osservare direttamente ne analizza le conseguenze e le condizioni a contorno e poi trova il modo di realizzare un modello analitico con cui dimostrare la sua esistenza. É ciò che fece Henri Poincaré (Nancy, 1854 – Parigi, 1912) un matematico, fisico e filosofo francese che nel 1903 scrisse:

"*Una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi. Ma non è così, può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore*

nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito".

Il lavoro di Poincaré sul problema dei tre corpi è fondato sulla distinzione fra il caos deterministico e quello non deterministico che ancora oggi è alla base della teoria dei sistemi complessi. Naturalmente Poincaré non ha risolto il problema dei tre corpi, che ad oggi rimane irrisolvibile, ma ha trovato alcuni modi per poterlo superare attraverso le soluzioni sopra indicate; ed è proprio grazie a lui che oggi siamo in grado di inviare sonde su altri pianeti sfruttando la forza di gravità dei pianeti stessi.

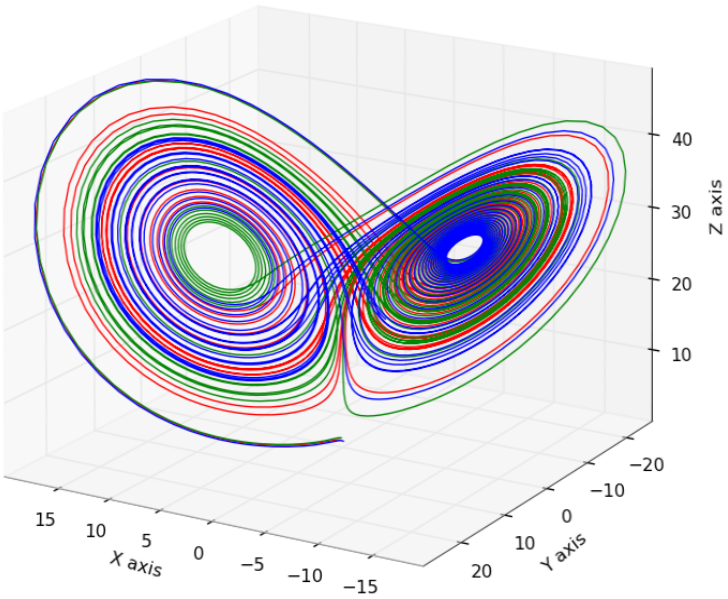


Fig.1.0.1 Immagine di un attrattore a farfalla di Lorenz

Un altro nome illustre che visse nello stesso periodo di Poincaré e che diede un notevole contributo nella teoria dei sistemi dinamici fu Aleksandr Michajlovič Ljapunov (Jaroslavl' 1857 – Odessa 1818) attraverso il suo famoso "esponente" o forse è più corretto dire "gli esponenti". Un esponente di Ljapunov di un sistema dinamico deterministico in un punto nello spazio delle fasi fornisce una misura di quanto sensibilmente le orbite del sistema sono dipendenti dai dati iniziali, caratterizzando l'eventuale presenza di dinamiche caotiche. Gli esponenti di Ljapunov misurano in particolare la velo-

cità media di allontanamento di due orbite infinitesimamente vicine per tempi sufficientemente lunghi; in un punto qualsiasi nello spazio delle fasi sono associati un numero di esponenti di Ljapunov pari alla dimensione dello spazio stesso. Insomma l'esponente di Ljapunov altro non è che un perfetto indicatore di caoticità, esso generalizza tutto ciò che riguarda le orbite periodiche ad un orbita qualunque. Traduciamo dunque l'instabilità di un qualunque punto fisso con la crescita esponenziale della norma del generico vettore che si evolve con la dinamica tangente: l'esponente di Ljapunov misura tale tasso di crescita. Se abbiamo una mappa ϕ, l'evoluzione della mappa (e della dinamica tangente associata) è data dal sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x_n)\, v_n \end{cases} \qquad [2]$$

dove v_n è il vettore tangente. A questo punto l'esponente di Ljapunov è dato dal seguente limite:

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|v_n\| \qquad [3]$$

Se λ è positivo allora il sistema presenta una dipendenza sensibile dai dati iniziali (in modo esponenziale), ed è quindi un sistema caotico.

Infine, ma non per ordine di importanza, c'è Edward Norton Lorenz (West Hartford 1917 – Cambridge 2008), il "padre" della maggior parte delle teorie sul caos deterministico. Egli era un matematico ma anche un meteorologo che nel 1963, mentre stava preparando una previsione meteorologica che aveva iniziato introducendo in un calcolatore vari parametri quantificati in numeri con sei cifre decimali. Riprendendo poi il lavoro dopo un'interruzione pensò bene di abbreviare il compito del calcolatore riducendo alcuni di essi a sole tre le cifre decimali, considerando che fossero più che sufficienti per assicurare la precisione scientifica dei risultati; ma quando li ebbe davanti agli occhi rimase strabiliato constatando l'abissale difformità riscontrata tra questi numeri e quelli che si sarebbe ragionevolmente aspettato in base ai parametri impostati. Lorenz si rese allora conto

che il tempo atmosferico costituisce un esempio di sistema non lineare molto complesso e che quella infinitesima modifica apportata ai parametri meteorologici si era ingigantita a dismisura nel corso del successivo sviluppo fino a sfociare in un risultato finale del tutto diverso ed imprevedibile. Da qui la famosa domanda: “Può il batter d'ali di una farfalla in Brasile provocare un tornado in Texas?”, che fu il titolo di una conferenza tenuta da Lorenz nel 1972. Ma in realtà la famosa “farfalla” di Lorenz si riferisce ai risultati di un suo studio finalizzato allo sviluppo analitico di un sistema di equazioni differenziali che simulasse un sistema caotico deterministico; ebbene una volta sviluppato tale sistema era possibile osservare un comportamento caotico su tre dimensioni che aveva proprio la forma di una farfalla, vedi fig.1.0.1.

1.1 Teoria del circuito di Lorenz

Edward Lorenz era un matematico ancorché un meteorologo, non aveva certo le basi per sviluppare dei circuiti elettronici e pertanto il titolo del presente paragrafo avrebbe dovuto essere il seguente: “teoria del circuito che emula le proprietà del sistema caotico sviluppato da Lorenz”; ma era troppo lungo e per questo motivo è stato abbreviato. In realtà il circuito che andremo ad analizzare in origine è stato presentato da Kevin M. Cuomo, Alan V. Oppenheim e Steven A. Strogatz nel 1993 in un articolo presentato su IEEE Transactions on Circuit and Systems II dal titolo: Synchronization Of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications To Communications; tale articolo descriveva un sistema di comunicazione basato sul sistema caotico di Lorenz anziché su quello di Chua (altro importante scienziato coreano), con tutte le conseguenze che esso comporta, soprattutto la complessità. Il circuito in origine utilizzava n.8 operazionali e due moltiplicatori analogici a quattro quadranti AD632, un circuito integrato costosissimo che oggi è praticamente impossibile trovare sul mercato perché obsoleto.

A rimetterci le mani allo scopo di adattare il circuito di Cuomo all'attuale disponibilità di componentistica fu il solito Ned J. Corron nel 2010, quello stesso Corron che fu l'artefice di un articolo sul sistema di comunicazione crittografato sfruttando il circuito di Chua. La sintesi ottenuta da Corron ha

consentito lo sviluppo del circuito di Lorenz con soli quattro operazionali e due moltiplicatori analogici AD633, quelli ancora attualmente disponibili e a costi contenuti (si fa per dire). In realtà esistono anche altri circuiti simili che consentono di ridurre ancora il numero di operazionali a tre, tuttavia trattasi di ulteriori affinamenti legati più che altro all'estro creativo di alcuni professionisti che nel corso degli anni hanno tentato numerose strade alternative per ridurre all'osso la complessità di questo circuito emulatore. Di seguito il lettore potrà trovare l'analisi del circuito proposto da Corron, un suo ulteriore ottimo esempio di sintesi analitica.

Il sistema caotico di Lorenz è definito nel seguente sistema di equazioni differenziali non lineari:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} = RX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \qquad [4]$$

Ricordo che il punto sopra la variabile indica la sua derivata rispetto al tempo. In questo sistema *X*, *Y*, e *Z* sono gli stati mentre *σ*, *R* e *b* sono parametri; secondo Lorenz i parametri tipici per ottenere un regime dinamico caotico sono: *σ*=10, *R*=30 e *b*=8/3. Onde ottenere nella pratica un circuito che sia in grado di emulare tale sistema di equazioni è necessario scalarle con un parametro aggiuntivo che chiameremo "*a*":

$$x = \frac{X}{\sqrt{aR}} \quad \text{e} \quad y = \frac{Y}{\sqrt{aR}} \quad \text{e infine} \quad z = \frac{Z}{aR} \qquad [5]$$

da questo momento "*a*" sarà il nostro "fattore di scala" attraverso il quale potremo riscrivere la [4] nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = aR\left(\frac{1}{a} - z\right)x - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \qquad [6]$$

Siccome l'evoluzione dei numeri nel sistema caotico di Lorenz con *a*=1, *σ*=10, *R*=30 e *b*=8/3 si raggiungerebbero livelli del tipo: x≈±18, y≈±28 e z≈+48 un buon compromesso per far rientrare tali numeri nei limiti della tensione massima operativa degli operazionali è necessario che *a*=1/3; in tal modo è possibile riscrivere la [6] come:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \frac{R}{3}(3 - z)x - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \qquad [7]$$

A questo punto è possibile definire uno schema di base col quale ragionare in termini analitici; lo schema in questione è rappresentato in fig.1.1.1.

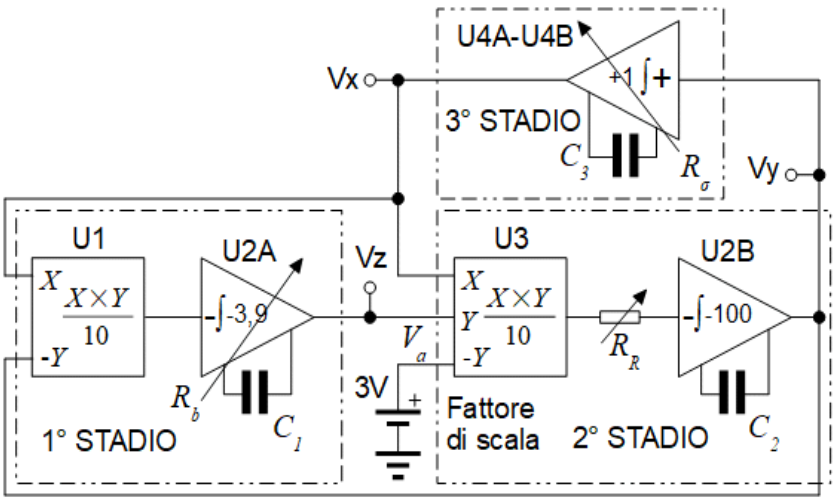


Fig.1.1.1 Schema di base del circuito di Lorenz (N. Corron)

Il sistema è composto da tre stadi collegati fra loro e richiusi ad anello, un classico nei sistemi oscillanti convenzionali; ogni stadio contribuisce a fornire una variabile alla sua uscita: il primo stadio produce la Vz, il secondo la Vy e infine il terzo determina la Vx. I primi due stadi impiegano i due moltiplicatori analogici, il terzo invece ne è privo, esso determina la Vx soltanto attraverso la Vy. La tensione che determina il fattore di scala (V_a) viene iniettata solo nel secondo stadio, all'ingresso negativo *-Y* del moltiplicatore;

la relazione esistente fra la tensione applicata su questo ingresso e il fattore di scala “a” è la seguente:

$$a = \frac{1\,Volt}{V_a} \quad \text{che nel nostro caso è:} \quad a = \frac{1}{3} \qquad [8]$$

ossia ciò che si voleva ottenere. I numeri riportati su ogni circuito integratore si riferisce al suo guadagno in continua (DC): sul primo stadio esso dipende da R_b ed è fissato al valore di 3,9, sul secondo stadio dipende da R_R, mentre la R_σ regola soltanto la frequenza di taglio dell'integratore nel terzo stadio, il cui guadagno è infatti sempre impostato a 1; soltanto R_R dovrà essere regolata all'occorrenza. Essa stabilisce il guadagno di retroazione dell'anello che deve essere ≥100 affinché l'oscillazione si auto-sostenga nel tempo. Resta da notare che i due circuiti integratori presenti nel primo e nel secondo stadio sono di tipo “invertente” (vedi il segno “-”) mentre quello del terzo stadio è di tipo “non invertente”, essendo anche a guadagno unitario servono due operazionali per realizzarlo.

Si osservi ora il flusso del segnale fra i vari stadi: l'uscita del primo entra nel secondo, quella del secondo entra nel terzo e infine l'uscita di quest'ultimo rientra sia nel primo che nel secondo in ciascuno dei quali è presente all'ingresso il moltiplicatore analogico che però internamente divide per 10. All'uscita dal secondo stadio il segnale percorre anche una seconda strada, cioè rientra sull'ingresso invertente (-*Y*) del primo moltiplicatore. Poiché trattasi di un sistema oscillante ad anello, anche se non lineare, indipendentemente dalle trasformazioni algoritmiche che si applicano al segnale in transito, onde garantire l'auto-sostentamento è necessario soddisfare il criterio di Barkhausen e cioè:

$$A_V > 1 \quad \text{e} \quad \varphi(A_V) = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ ecc. \qquad [9]$$

In cui A_V rappresenta la somma dei guadagni (e delle attenuazioni) applicate da ogni singolo circuito e φ rappresenta la fase di chiusura dell'anello. Nel nostro sistema esistono due anelli di chiusura: il primo anello, quello in alto, si richiude sia fra il terzo stadio e il secondo che fra il terzo e il primo; il secondo anello è quello in basso che richiude il secondo stadio sul primo. L'unica chiusura che soddisfa entrambe le condizioni di Barkhausen è quello

che si richiude fra il terzo stadio e il primo, tutte le altre chiusure non permetterebbero l'auto-sostentamento dell'oscillazione per colpa della fase che non soddisfa il suddetto criterio. Gli effetti della chiusura dell'anello sul secondo stadio, nonché quella fra il secondo e il primo che sono entrambi in opposizione di fase, sono proprio quelli che determinano l'effetto caotico teorizzato da Lorenz. L'anello che soddisfa le condizioni di Barkhausen agisce esattamente come una resistenza negativa che determina l'instabilità che consente al circuito di oscillare.

1.2 Implementazione del circuito di Lorenz

Lo schema elettrico completo di un circuito che emula il sistema caotico di Lorenz è rappresentato in fig. 1.2.1.

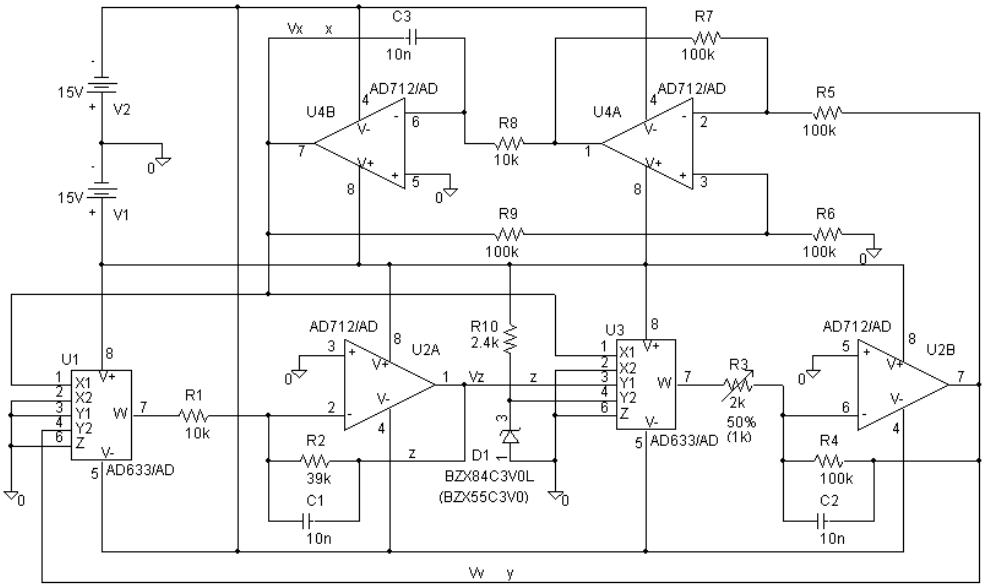


Fig.1.2.1 Schema elettrico del circuito di Lorenz (N. J. Corron)

Si fa presente che alcuni ambienti di simulazione che usano motori SPICE hanno difficoltà a simulare questo circuito perché stentano a convergere sul calcolo iniziale sui punti di equilibrio in DC in presenza di modelli di moltiplicatori analogici quando c'è più di una richiusura ad anello; tuttavia con

Microcap (V12) questo problema è stato superato, anche se è noto che i modelli caricati in origine su questo simulatore in alcune situazioni hanno qualche differenza rispetto ai target reali e pertanto non sono completamente affidabili, ci si riferisce soprattutto ai tiristori.

Con questo circuito i parametri indicati nella parte teorica si calcolano nel modo seguente:

$$R=\frac{10\times 10^3}{aR_R} \qquad \sigma=\frac{100\times 10^3}{R_\sigma} \qquad b=\frac{100\times 10^3}{R_b} \qquad [10]$$

in cui R_R = R3, R_σ = R8 e R_b = R2. Fra questi resistori l'unico che necessita di una regolazione è R3 che dovrebbe essere aggiustato all'incirca alla metà del suo valore massimo; con un valore più alto l'oscillatore tende a spegnersi perché il guadagno del secondo stadio si riduce e l'oscillazione tende quindi a smorzarsi o addirittura non riesce nemmeno a partire. Viceversa con valori inferiori la frequenza di queste oscillazioni caotiche tende ad aumentare ma aumenta anche il rumore intrinseco dell'oscillatore che tende a perturbare le traiettorie; la situazione ideale è quella rappresentata in fig.1.2.2 in cui è nettamente visibile un tempo di latenza piuttosto lungo prima che l'oscillazione inizi ad avere il suo naturale ciclo evolutivo, ciò dipende però anche dai valori delle tre capacità C1, C2 e C3.

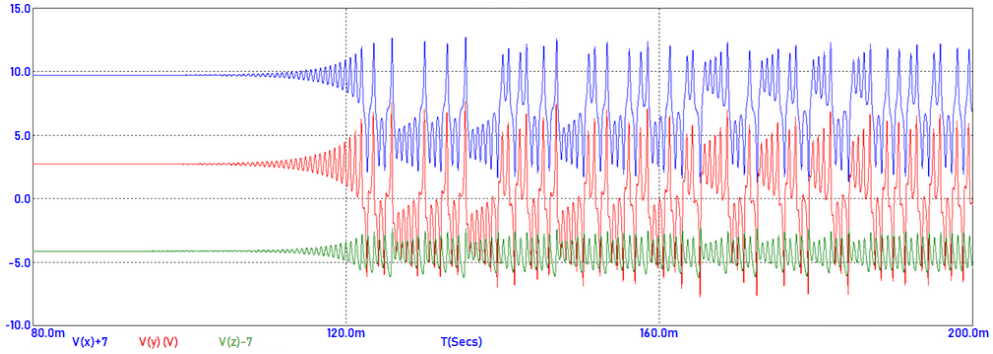


Fig.1.2.2 Tensioni presenti alle uscite Vx, Vy e Vz nel circuito di Lorenz

Anche nel presente oscillatore è importante utilizzare valori resistivi con tolleranze inferiori al 5% per garantire un risultato accettabile; è peraltro consigliabile selezionare pure le tre capacità affinché esse abbiano valori simili fra loro, non è importante il valore assoluto che può variare fra 1nF e

1uF, naturalmente capacità maggiori rallentano il ciclo evolutivo. Per quanto riguarda gli operazionali gli AD712 utilizzati in simulazione possono essere sostituiti con i TL082, ma eventualmente sarebbe il caso di usare i TL072 che sono a basso rumore, o meglio ancora sarebbe caldamente consigliato usare gli LF412 che sono operazionali di precisione a basso rumore.

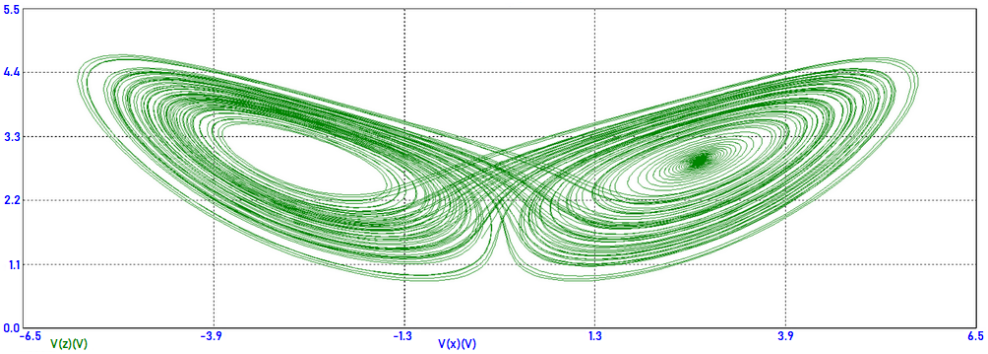


Fig.1.2.3 Relazione di fase fra le tensioni Vx e Vz nel circuito di Lorenz

Infatti, il sistema caotico di Lorenz presenta numerose criticità dal punto di vista realizzativo, una fra tutte è la sua sensibilità alla presenza di tensioni di offset sugli operazionali e/o sui moltiplicatori, visto l'accoppiamento in continua fra tutti gli stadi;

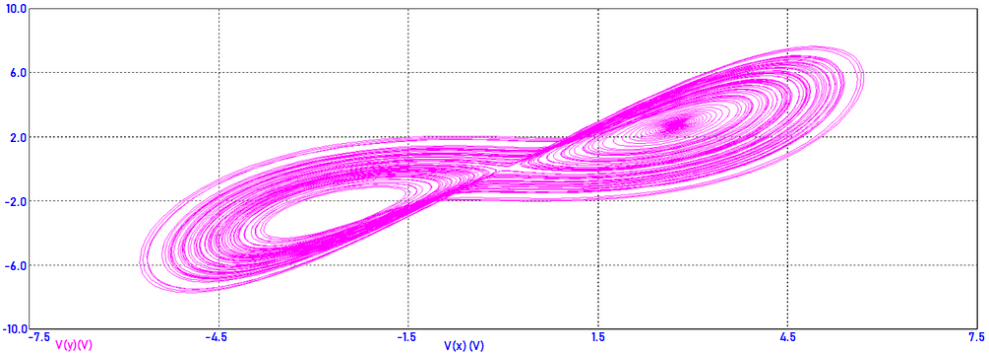


Fig.1.2.4 Relazione di fase fra le tensioni Vx e Vy nel circuito di Lorenz

qualora fosse necessario, ma non capita quasi mai, se l'oscillatore facesse fatica a partire talvolta può aiutare una piccola correzione dell'offset dei moltiplicatori: se con tutti i quattro ingressi X-Y connessi a massa all'uscita si notasse la presenza di una piccola tensione di offset si può correggere

questa anomalia iniettando una piccola tensione di segno opposto all'ingresso “Z” del moltiplicatore per azzerare questo offset indesiderato. La tensione applicata dovrà essere precedentemente stabilizzata onde evitare il suo trascinamento con le tensioni di alimentazione.

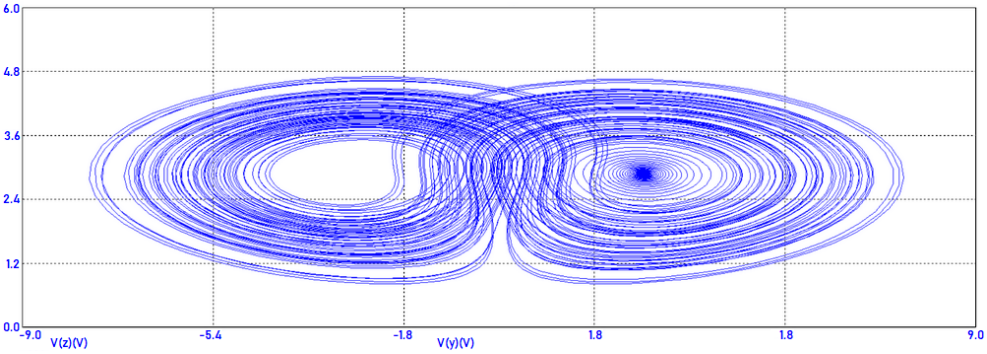


Fig.1.2.5 Relazione di fase fra le tensioni Vy e Vz nel circuito di Lorenz

In fig.1.2.3 è possibile ammirare la cosiddetta “farfalla” di Lorenz ottenuta attraverso la simulazione del circuito di fig.1.2.1; collegando l'oscilloscopio anche alla terza uscita, in base alla casistica, sarà possibile osservare anche le altre due affascinanti relazioni fase ottenute e rappresentate nelle fig.1.2.4 e fig.1.2.5; l'oscillazione parte dal centro della parte destra di ogni immagine, ma sull'oscilloscopio entrambi gli “occhi” risulteranno aperti.

Infine si raccomanda sempre l'utilizzo di almeno n.8 ulteriori capacità di decoupling da 100nF fra la massa e ciascun piedino di alimentazione di ogni circuito integrato; inoltre, anche la presenza di n.2 condensatori da ≥1µF fra la massa e gli ingressi generali di alimentazione eliminano qualsiasi eventuale disturbo captato dai cavi di collegamento verso gli alimentatori.

1.3 Sistema di Lorenz ipercaotico pilotato da una sinusoide

Questo paragrafo è dedicato ai lettori che desiderano un approccio più analitico con i sistemi oscillanti caotici, in particolare quello di Lorenz.

Qual'è la differenza fra un sistema oscillante caotico e uno ipercaotico? Entrambi rappresentano una forma “ordinata” del disordine, con la differenza che nel primo l'evoluzione delle traiettorie delle orbite nello spazio

confinato è determinata solo dalla struttura del sistema, nel secondo, invece, tale evoluzione è condizionata anche da un segnale modulante ciclico proveniente dall'esterno; nel caso che tratteremo esso sarà una sinusoide. Pertanto non si tratta di una vera e propria "modulazione", si tratta semplicemente di una variante applicata ai sistemi oscillanti caotici necessaria per poter studiare il loro comportamento nel dettaglio; l'obiettivo di questo studio è orientato all'utilizzo dei sistemi caotici implementati mediante DSP (Digital Signal Processor) per trasferire informazioni sensibili con elevati livelli di sicurezza. D'altra parte i sistemi oscillanti caotici si prestano bene ad essere elaborati con potenti processori numerici "real-time" che possono integrare anche efficaci sistemi di filtraggio e quelli per la ricostruzione dei segnali. Per tale trattazione si è scelto di proporre il lavoro eseguito nel 2015 da Chunyan Han, Simin Yu e Guangyi Wang, tre ricercatori cinesi ai quali vanno i nostri ringraziamenti per l'estrema chiarezza e semplicità nella trattazione analitica complessa, ma molto ben argomentata, che essi ci hanno voluto donare.

Il sistema di Lorenz può essere definito col seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -A(x-y) \\ \dot{y} = Bx - xz - y \\ \dot{z} = xy - Dz \end{cases} \qquad [1]$$

Dove *A*, *B* e *D* sono i parametri di sistema; la nomenclatura dei parametri è stata cambiata rispetto a quelli indicati nel paragrafo 2.4.1 onde avere una lettura più semplice e fluida. Qualora volessimo aggiungere alla prima equazione differenziale un tono sinusoidale otterremmo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -A(x-y-a\sin\omega t) \\ \dot{y} = Bx - xz - y \\ \dot{z} = xy - Dz \end{cases} \qquad [2]$$

dove $a\sin\omega t$ rappresenta la funzione sinusoidale, mentre *a* e *ω* rappresentano rispettivamente l'ampiezza e la velocità angolare. Naturalmente è possibile ancora raggruppare i termini temporali nella variabile $u = \omega t$ ottenendo così un sistema autonomo 4D di Lorenz, ovvero:

$$\begin{cases} \dot{x} = -A(x - y - a\sin u) \\ \dot{y} = Bx - xz - y \\ \dot{z} = xy - Dz \\ \dot{u} = \omega \end{cases} \qquad [3]$$

Con $A=8$, $B=35$, $D=8/3$, $a=6$ e $\omega=4{,}5$ il sistema [3] genera un attrattore ipercaotico "a due ali" rappresentato in fig.1.3.1 sulla sinistra; con $A=10$, $B=30$, $D=8/3$, $a=17$ e $\omega=0{,}5$ lo stesso sistema genera un attrattore caotico "a quattro ali" rappresentato a destra.

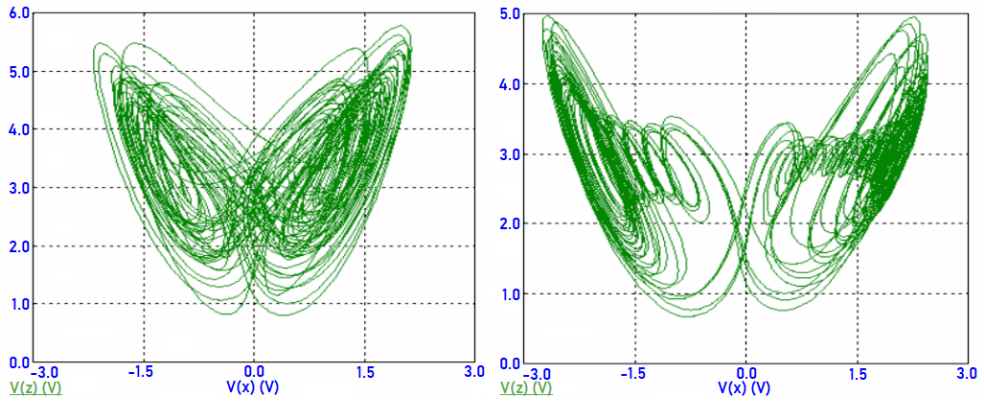


Fig.1.3.1 Sistema di Lorenz ipercaotico (a due ali) a sinistra e sistema caotico (a quattro ali) a destra

Questo vuol dire che l'introduzione di un segnale ciclico dall'esterno è necessario ma non sufficiente per ottenere un segnale ipercaotico, sono anche i parametri che lo determinano; seguirà un'analisi molto più approfondita di quanto appena affermato. Una caratteristica dei sistemi caotici è che essi non raggiungono mai punti di equilibrio, tuttavia in una situazione come quella rappresentata sulla destra di fig.1.3.1 sembrerebbe invece che qualche punto di equilibrio esiste e che il sistema "gli stia girando intorno"; tale comportamento sarà tanto più evidente quando ω aumenta, ma non oltre un certo limite; è come se il sistema tendesse ad "agganciarsi" alla pulsazione dello stimolo introdotto dall'esterno ma soltanto in alcune precise condizioni, vediamo ora nel dettaglio quali sono queste condizioni.

In base al sistema [2] un eventuale punto di equilibrio sarebbe possibile ottenerlo attraverso le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_e^3+bx_e^2+cx_e+d=0 \\ y_e=x_e+b \\ z_e=\dfrac{\left(x_e^2+bx_e\right)}{D} \end{cases} \qquad [4]$$

dove $b=-a\sin(\omega t)$, $c=D(1-B)$ e $d=-Da\sin(\omega t)$; l'equazione in testa è una cubica, pertanto ponendo $x_e=X_e-b/3$ e sostituendo tale termine nella prima equazione otteniamo:

$$X_e^2+p\,x_e+q=0 \qquad [5]$$

dove $p=c-b^2/3$ e $q=2b^3/27-cb/3+d$.

In base alla discriminante di Girolamo Cardano $\Delta=(q/2)^2+(p/3)^2$ quando $\Delta>0$ nella [5] esiste una radice reale e due radici complesse. Se $\Delta\leqslant 0$ il sistema invece avrà tre radici reali e ciò significa che avrà tre punti di equilibrio definiti come segue:

$$\begin{cases} x_{1e}=\mu_2\times\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\mu_1\times\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}-\dfrac{b}{3} \\ y_{1e}=x_{1e}+b \\ z_{1e}=\dfrac{x_{1e}^2+bx_{1e}}{D} \end{cases} \qquad [6a]$$

$$\begin{cases} x_{2e}=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}-\dfrac{b}{3} \\ y_{2e}=x_{2e}+b \\ z_{2e}=\dfrac{x_{2e}^2+bx_{2e}}{D} \end{cases} \qquad [6b]$$

$$\begin{cases} x_{3e}=\mu_1\times\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\mu_2\times\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}-\frac{b}{3} \\ y_{3e}=x_{3e}+b \\ z_{3e}=\frac{x_{3e}^2+bx_{3e}}{D} \end{cases} \qquad [6c]$$

in cui $\mu_1=(-1+j\sqrt{3})/2$ e $\mu_2=(-1-j\sqrt{3})/2$; contrariamente a ciò che di solito si realizza osservando i tre sistemi [6] Δ può anche essere un numero negativo e in effetti lo è, ma non è fisso, esso ha un andamento periodico nel tempo come rappresentato in fig.1.3.2 che però varia sensibilmente se il sistema è ipercaotico o meno. Inoltre, poiché il punto di equilibrio non può essere un numero complesso ciò significa che il sistema non avrà punti di equilibrio se $\Delta>0$.

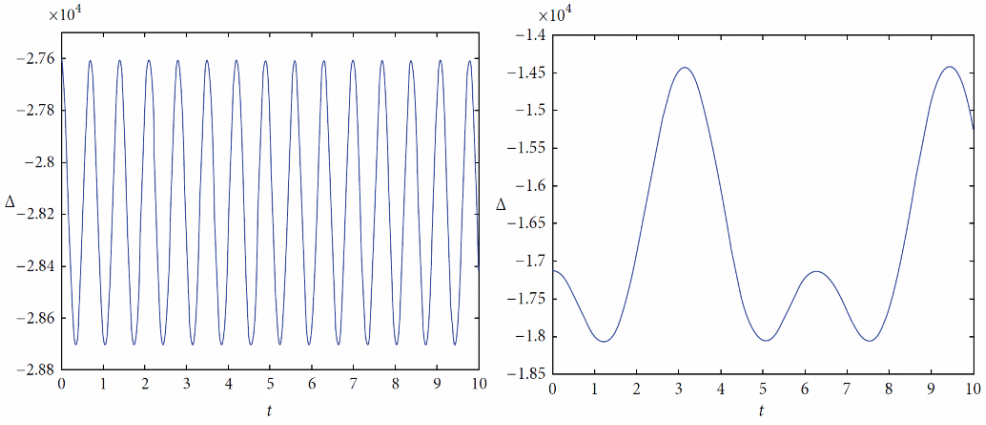


Fig.1.3.2 Δ nel sistema modulato: ipercaotico a sinistra e caotico a destra

In base alla [5] e alle [6] esistono tre traiettorie di punti di equilibrio che formano una "sella", come rappresentato in fig.1.3.3; nei sistemi ipercaotici i centri delle traiettorie laterali sono soltanto due e si trovano posizionati orientativamente al centro dei due scroll (le ali della "farfalla"), mentre nei sistemi caotici modulati talvolta si contano due coppie di centri disposti sulle traiettorie laterali dei punti di equilibrio; trattandosi di quattro centri la "farfalla" si presenta con due ali supplementari in più, di ampiezza ridotta e disposte all'interno rispetto a quelle principali, vedi fig.1.3.3.

© OPTELEX - Diritti riservati

https://www.optelex.com

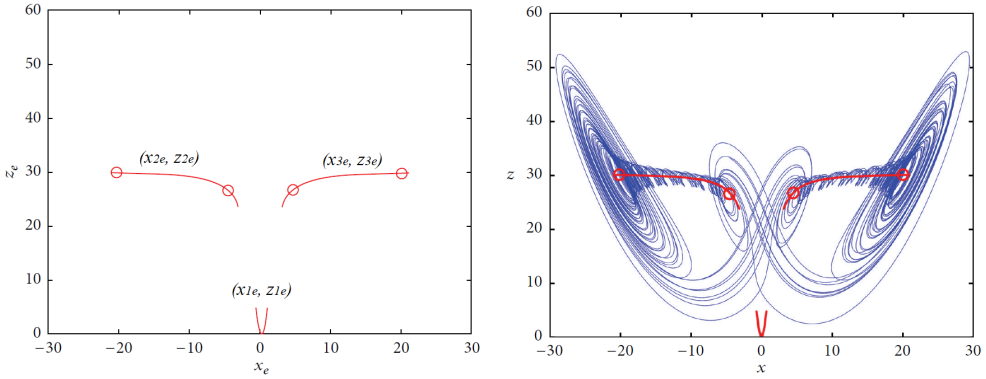


Fig.1.3.3 Punti e traiettorie di equilibrio in un sistema modulato caotico

Ed è proprio questa singolarità a donare a tale rappresentazione il termine di “four wings attractor” ossia “attrattore a quattro ali” (ci vuole un po' di fantasia a intravedere una “libellula” al posto di una farfalla, ma tant'è).

Quando $A=8$, $B=35$, $D=8/3$, $a=6$ e $\omega=4{,}5$ gli esponenti di Ljapunov sono:

$$\begin{aligned}\lambda_1&=0{,}8058\\ \lambda_2&=0{,}1216\\ \lambda_3&\approx 0\\ \lambda_4&=-12{,}5986\end{aligned} \qquad [7]$$

la dimensione di Ljapunov di un attrattore è definito dai suoi esponenti, quattro dimensioni uguale quattro esponenti, vedi la [3], pertanto:

$$D_\lambda = j+\frac{\sum_{i=1}^{j}\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \qquad [8]$$

dove j è un intero che soddisfa: $\sum_{i=1}^{j}\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{j+1}\lambda_i < 0$.

Con gli esponenti indicati la dimensione di Ljapunov vale $D_\lambda=3{,}0740$ e ciò significa che l'attrattore ipercaotico ha le caratteristiche di un frattale; in particolare esso non presenta biforcazioni evidenti e pertanto la sua

mappa è distribuita in maniera uniforme. I valori dei quattro esponenti di Ljapunov sono quindi stati semplicemente raccolti e mappati rispetto a "ω" e rispetto ad "a" nei grafici rappresentati in fig.1.3.4.

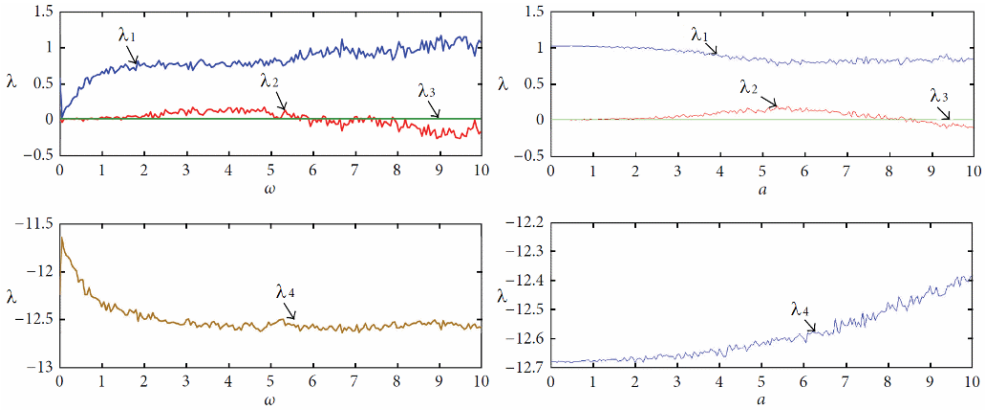


Fig.1.3.4 Sistema ipercaotico: valori dei quattro esponenti di Ljapunov rispetto a "ω" (con a = 6) e rispetto ad "a" (con ω = 4,5)

Viceversa, quando $A=10$, $B=30$, $D=8/3$, $a=17$ e cioè quando il sistema è modulato ma è solo caotico la mappatura degli esponenti di Ljapunov rispetto a "ω" cambia radicalmente, vedi fig.1.3.5;

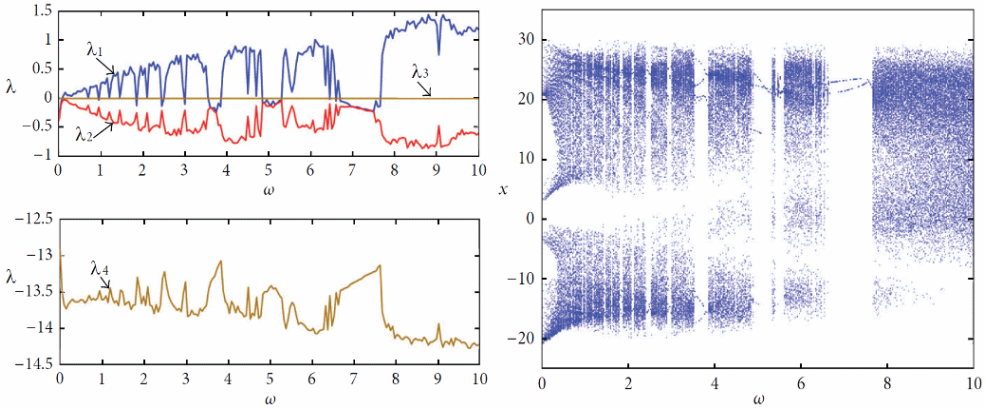


Fig.1.3.5 Sistema caotico modulato: valori dei quattro esponenti di Ljapunov rispetto a "ω" e frattale corrispondente

è evidente la presenza di numerose discontinuità che sono visibili anche nella rappresentazione a frattale e se si osserva bene in essa si percepiscono anche delle biforcazioni di vario genere, come quella di Pitchfork, ad

esempio, ma c'è anche quella di “period-doubling” e quella “tangente”, detta anche “a nodo sella”; insomma tali discontinuità mettono in evidenza la presenza di comportamenti singolari del sistema per alcuni valori di “ω” quando $a=17$, in particolare ciò accade quando *“ω”* vale uno qualsiasi dei seguenti numeri: 0,5 , 1,03 , 1,47 , 2,5 , 3,8 e 7,6. Onde valutare questi comportamenti singolari per l'occasione è stato realizzato un nuovo circuito oscillante di Lorenz in ambiente simulato, ma stavolta si è cercato di renderlo più comprensibile, anche dal punto di vista grafico, rispetto a quello che avevamo già visto in precedenza, nonostante la maggiore complessità.

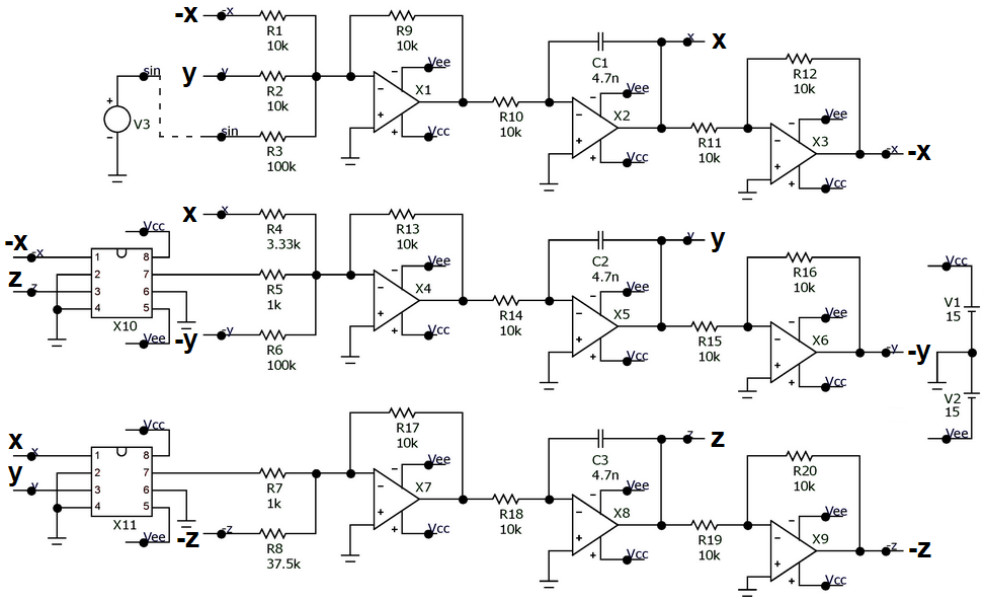


Fig.1.3.6 Circuito elettrico alternativo che simula il sistema di Lorenz

Osservando il circuito di fig.1.3.6 notiamo subito che esso è composto da n.3 sotto-stadi ciascuno dei quali determina una variabile del sistema di Lorenz; ogni sotto-stadio è strutturato in modo da avere un elaboratore analogico in ingresso, un integratore intermedio e un circuito invertitore in uscita. I punti di ingresso e di uscita con riferimenti uguali sono tutti interconnessi fra loro; a parte il generatore sinusoidale V3, che inietta lo stimolo esterno attraverso il resistore R3, l'intero circuito realizza un sistema oscillante caotico di Lorenz del tutto autonomo e funzionante. I resistori da R1 a R8 sono quelli che impongono le condizioni per ottenere l'oscillazione, mentre tutti gli altri, da R9 a R20, hanno un valore uguale che definiremo

"R"; analogamente anche le tre capacità dei circuiti integratori, C1, C2 e C3 sono anch'essi uguali fra loro e nella successiva analisi li definiremo "C".

In base al circuito di fig.1.3.6 le equazioni di stato saranno:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \dfrac{1}{RC}\left(\dfrac{R}{R_1}x + \dfrac{R}{R_2}y + \dfrac{R}{R_3}a\sin(\Omega t)\right) \\ \dfrac{dy}{d\tau} = \dfrac{1}{RC}\left(\dfrac{R}{R_4}x - \dfrac{R}{10\,R_5}xz - \dfrac{R}{R_6}y\right) \\ \dfrac{dz}{d\tau} = \dfrac{1}{RC}\left(\dfrac{R}{10\,R_7}xy - \dfrac{R}{R_8}z\right) \end{cases} \qquad [9]$$

volendo scalare in proporzione ciascuna variabile per ottenere un sistema "compresso", in cui $x \to 0{,}1\,x$, $y \to 0{,}1\,y$ e $z \to 0{,}1\,z$, come anche per la scala dei tempi $\tau = 10\,RC\,t$, avremo che:

$$\begin{cases} \dfrac{d(0.1\mathrm{x})}{10\,RC\,dt} = \dfrac{1}{RC}\left(\dfrac{R}{R_1}0{,}1\,x + \dfrac{R}{R_2}0{,}1\,y + \dfrac{R}{R_3}a\sin(10\,RC\,\Omega\,t)\right) \\ \dfrac{d(0{,}1\,y)}{10\,RC\,dt} = \dfrac{1}{RC}\left(\dfrac{R}{R_4}0{,}1\,x - \dfrac{R}{10\,R_5}0{,}1^2\,xz - \dfrac{R}{R_6}0{,}1\,y\right) \\ \dfrac{d(0{,}1\,z)}{10\,RC\,dt} = \dfrac{1}{RC}\left(\dfrac{R}{10\,R_7}0{,}1^2\,xy - \dfrac{R}{R_8}0{,}1\,z\right) \end{cases} \qquad [10]$$

e infine ponendo $R_1 = R_2$ il sistema si semplifica e si ottiene che:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10\dfrac{R}{R_1}(y - x) + 100\dfrac{R}{R_3}a\sin(10\,RC\,\Omega\,t) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{10\,R}{R_4}x - \dfrac{R}{10\,R_5}xz - \dfrac{10\,R}{R_6}y \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{R}{10\,R_7}xy - \dfrac{10\,R}{R_8}z \end{cases} \qquad [11]$$

Comparando la [11] con la [2] otteniamo che: $A = 10\,R/R_1 = 100\,R/R_3$, $B = 10\,R/R_4$, $D = 10\,R/R_8$, $1 = R/(10\,R_5) = R/(10\,R_6) = R/(10\,R_7)$, e

$\omega = 10\,RC\,\Omega$. A questo punto tutti i parametri possono essere determinati in questo modo: $R_1 = R_2 = 10\,R/A$, $R_3 = 100\,R/A$, $R_4 = 10\,R/B$, $R_8 = 100/D(k\,\Omega)$, $R_5 = R_7 = R/10$, $R_6 = 10\,R$ e $\Omega = \omega/(10\,RC)$.

Ponendo $R = 10\text{k}\,\Omega$ e $C = 4{,}7\,nF$: allora $R_1 = R_2 = 100/A(k\,\Omega)$, $R_3 = 1000/A(k\,\Omega)$, $R_4 = 100/B(k\,\Omega)$, $R_8 = 100/D(k\,\Omega)$, $R_5 = R_7 = 1\,k\,\Omega$, $R_6 = 100\,k\,\Omega$, $\Omega = \omega/10\,RC = 2{,}13 \times 10^3\,\omega$ e $f = \Omega/2\pi = 2{,}13 \times 10^3\,\omega/2\pi$.

Distinguiamo ora due possibili casistiche:

1. sistema ipercaotico con attrattore “a due ali”: si ottiene ponendo $A = 8$, $B = 35$, $D = 8/3$, $a = 6$, $\omega = 4{,}5$, $R_1 = R_2 = 12{,}5\,k\,\Omega$, $R_3 = 125\,k\,\Omega$, $R_4 = 2{,}86\,k\,\Omega$, $R_8 = 37{,}5\,k\,\Omega$, $R_5 = R_7 = 1\,k\,\Omega$, $R_6 = 100\,k\,\Omega$ e $f = 1{,}53\,kHz$
2. sistema caotico con attrattore “a quattro ali”: si ottiene ponendo $A = 10$, $B = 30$, $D = 8/3$, $a = 17$, $R_1 = R_2 = 10\,k\,\Omega$, $R_3 = 100\,k\,\Omega$, $R_4 = 3{,}33\,k\,\Omega$, $R_8 = 37{,}5\,k\,\Omega$, $R_5 = R_7 = 1\,k\,\Omega$ e infine $R_6 = 100\,k\,\Omega$.

In quest'ultima casistica sarà *“ω”* a variare, secondo lo schema seguente:

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{2{,}13 \times 10^3\,\omega}{2\pi}$$

ω	*f(Hz)*	*ω*	*f(Hz)*
0,5	169,5	2,5	847,5
1,03	349,17	3,8	1288,2
1,47	498,33	7,6	2575,39

[12]

Nel primo caso il risultato è già possibile osservarlo attraverso la rappresentazione a sinistra della fig.1.3.1; in questa situazione ricordo che non esistono evidenti discontinuità nella mappatura dei quattro esponenti di Ljapunov, pertanto il sistema presenterà caratteristiche analoghe indipendentemente dalla frequenza del generatore sinusoidale V3. Nel secondo caso, invece, sono stati individuati n.6 punti di discontinuità nella mappatura degli esponenti, in realtà ce ne sono altri ma per il momento si spera che il lettore si accontenti dell'analisi che è stata fatta su questi sei casi. Sarebbe lecito attendersi comportamenti strani o irregolari in tali situazioni, tuttavia

nessuno avrebbe mai potuto immaginare quello che andremo ad osservare; dopo una prima fase caotica di assestamento il sistema oscillante tende a sincronizzarsi con la velocità angolare della sinusoide producendo orbite aventi traiettorie ripetitive anche se morfologicamente molto complesse e articolate, vedi fig.1.3.7.

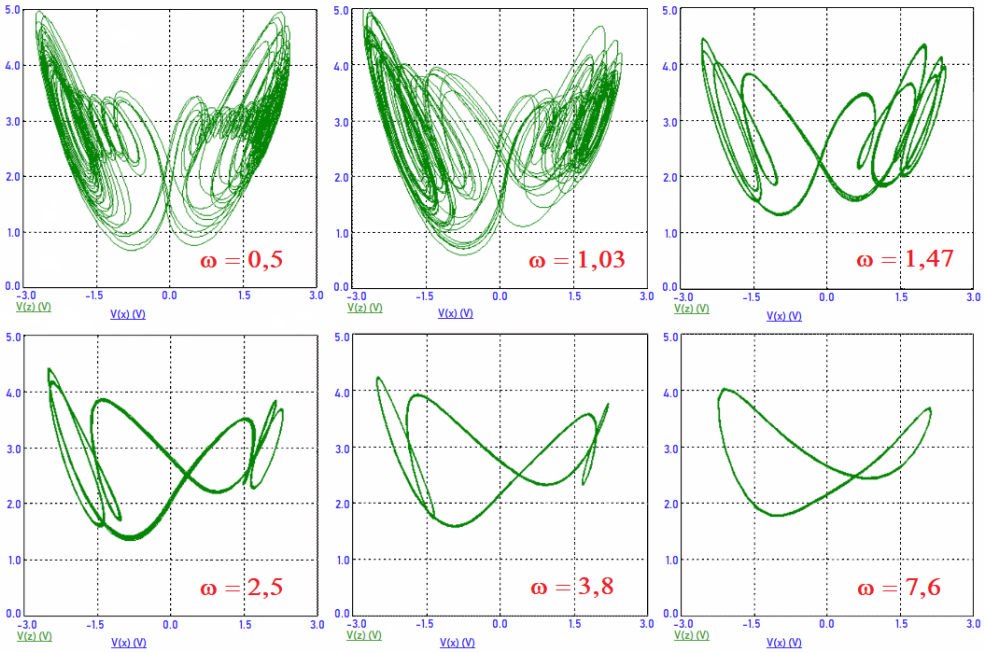


Fig.1.3.7 Morfologia delle traiettorie di Vz rispetto a Vx nei casi particolari in cui sono presenti biforcazioni nella mappatura

Le immagini riprodotte in figura sono state ricavate da un ambiente di sviluppo SPICE, non derivano da un simulatore analitico-numerico come Matlab o MathCAD; questo significa che, nonostante la sua complessità, il circuito presentato in fig.1.3.6 è perfettamente in grado di riprodurre tali comportamenti. Volendolo realizzare fisicamente l'importante è utilizzare operazionali BiFET di precisione come l'AD712 della Analog Device o dei loro equivalenti; i moltiplicatori X10 e X11 sono degli AD633 mentre tutti i resistori sono al 2% di tolleranza o inferiore, in questo circuito non servono trimmer di regolazione, i parametri sono già tutti impostati. I tre condensatori andrebbero selezionati prima di montarli sul circuito, eventuali piccole

differenze si riflettono sui valori di frequenza da impostare onde ottenere i risultati attesi. Si suggerisce di utilizzare un generatore di funzioni arbitrarie per stimolare il sistema oscillante poiché esso utilizza un DDS per ottenere la sinusoide e ciò garantisce un'ottima precisione sia sulla frequenza che sul livello di modulazione. Qualora si volesse aumentare la sensibilità di ingresso, magari perché il generatore non è in grado di produrre sinusoidi di ampiezze sufficientemente elevate, si suggerisce di ridurre il valore di R_3 di un fattore 2 (ad esempio 50kΩ anziché 100kΩ), in questo modo la porta di ingresso avrà una sensibilità doppia rispetto alle stime originali. Infine, come al solito, si raccomanda di aggiungere sempre un condensatore di decoupling da 100nF fra la massa e ciascun piedino di alimentazione di ogni integrato, ma anche due capacità da almeno 1µF fra la massa e i due ingressi di alimentazione dell'intero circuito per eliminare qualsiasi eventuale disturbo captato dai cavi di collegamento verso l'alimentatore.

RIFERIMENTI E BIBLIOGRAFIA

BERGER P. R., RAMESH A.: "*Negative Differential Resistance Devices and Circuits*", The Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2011, Elsevier B.V..

CORRON NED J.: "*A Simple Circuit Implementation of a Chaotic Lorenz System*", Creative Consulting for Research and Education, 2010.

CORRON NED J., PETHEL SHAWN D., HOPPER BUCKLEY A.: "*A simple electronic system for demonstrating chaos control*", U.S. Army Aviation and Missile Command"; © American Association of Physics Teachers, 2004.

CRISTALLINI A.: "*Il Caos Deterministico*", AIF - XV Scuola di Storia della Fisica, Messina, 23 - 27 febbraio 2015.

CUOMO K. M., OPPENHEIM A. V., STROGATZ S. H.: "*Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications*", IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1993.

DALFOVO F.: "*Oscillatori Onde e Caos*", Appunti di Fisica Generale I, Dipartimento di Fisica, Università di Trento, 2019.

HEGGER R., KANTZ H., SCHREIBER T.: "*Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*", Chaos, Vol.9 n.2, © 1999 American Institute of Physics.

MARGUÍA J. S., CAMPOS-CANTÓN E.: "*Wavelet analysis of chaotic time series*", Departamento de Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de San Luis Potosí S.L.P., México, 2005.

MINATI L.: "*Electronic networks of chaotic oscillators as physical models of some emergent phenomena in neural dynamics*", Instytut Fizyki Jądrowej, Polskiej Akademii Nauk, 2016.

ULANSKY V., RAZA A., OUN H.: "*Electronic Circuit with Controllable Negative Differential Resistance and its Applications*", MDPI, 2019.